Inferencia Estadística

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Inferencia Estadística

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Índice

1. Distribuciones discretas **4**
- 1.1. Distribución degenerada 4
- 1.2. Uniforme discreta 4
- 1.3. Distribución de Bernoulli 5
- 1.4. Binomial 5
- 1.5. Distribución Geométrica 6
- 1.6. Binomial Negativa 7
- 1.7. Hipergeométrica 7
- 1.8. Poisson 7

2. Distribuciones continuas **8**
- 2.1. Uniforme continua 8
- 2.2. Normal 9

3. Aproximaciones **9**
- 3.1. De Hipergeométrica a Binomial 9
- 3.2. De Binomial a Poisson 9
- 3.3. De Binomial a Normal 10
- 3.4. De Poisson a Normal 10
- 3.5. Corrección por continuidad 10

Este documento ha sido creado con el objetivo de ser un manual de rápida lectura que sirva de recordatorio de las distribuciones más usadas en las asignaturas de EDIP, Probabilidad e Inferencia Estadística; así como de ciertas propiedades útiles a la hora de calcular ciertas probabilidades. En ningún momento pretende ser un manual riguroso de cómo se definen dichas probabilidades, un resumen de las asignaturas, o un recurso relevante de ningún tipo.

1. Distribuciones discretas

1.1. Distribución degenerada

Espacio muestral. $\mathcal{X} = \{c\}$ con $c \in \mathbb{R}$.

Función masa de probabilidad.

$$P[X = x] = \begin{cases} 1 & \text{si } x = c \\ 0 & \text{si } x \neq c \end{cases}$$

Función de distribución.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ 1 & \text{si } c \leqslant x \end{cases}$$

Función generatriz de momentos.

$$M_X(t) = e^{tc} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Esperanza y varianza.

$$E[X] = c, \qquad Var(X) = 0$$

1.2. Uniforme discreta

$$X \rightsquigarrow U(x_1, \ldots, x_n), \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$$

Espacio muestral. $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Función masa de probabilidad.

$$P[X = x] = \begin{cases} 1/n & \text{si } x = x_i,\ i \in \{1, \ldots, n\} \\ 0 & \text{si } x \neq x_i,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \end{cases}$$

Función de distribución.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ k/n & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}[\\ 1 & \text{si } x_n \leqslant x \end{cases}$$

Función generatriz de momentos.

$$M_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Esperanza.

$$E[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

1.3. Distribución de Bernoulli

Si X modela el número de éxitos en una ocurrencia de un experimento con probablidad $p \in]0,1[$ de éxito.

$$X \rightsquigarrow B(p), \qquad p \in]0,1[$$

Espacio muestral. $\mathcal{X} = \{0,1\}$.

Función masa de probabilidad.

$$P[X = x] = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1-p & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \notin \{0,1\} \end{cases} = p^x(1-p)^{1-x}$$

Función de distribución.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-p & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$$

Función generatriz de momentos.

$$M_X(t) = 1 + p(e^t - 1) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Esperanza y varianza.

$$E[X] = p, \qquad Var(X) = p(1-p)$$

1.4. Binomial

Si X modela el número de éxitos en $n \in \mathbb{N}$ repeticiones de un experimento de Bernoulli con probabilidad $p \in]0,1[$ de éxito.

$$X \rightsquigarrow B(n,p), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad p \in]0,1[$$

Notemos que $B(1,p) \equiv B(p)$.

Espacio muestral. $\mathcal{X} = \{0,\ldots,n\}$.

Función masa de probabilidad.

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Función generatriz de momentos.

$$M_X(t) = \left[1 + p(e^t - 1)\right]^n \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Esperanza y varianza.

$$E[X] = np, \qquad Var(X) = np(1-p)$$

Propiedades.

- Sus valores se encuentran tabulados para distintos valores de n y p.
- Si $X \rightsquigarrow B(n,p)$ y $Y = n - X$ es la variable que contabiliza el número de fracasos, entonces $Y \rightsquigarrow B(n, 1-p)$ y:

$$P[X = x] = P[Y = n - x]$$

1.5. Distribución Geométrica

Si X modela el número de fracasos antes de llegar al primer éxito en un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $p \in]0,1[$.

$$X \rightsquigarrow G(p), \qquad p \in]0,1[$$

Espacio muestral. $\mathcal{X} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Función masa de probabilidad.

$$P[X = x] = (1-p)^x p$$

Función de distribución.

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - (1-p)^{x+1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Función generatriz de momentos.

$$M_X(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^t} \qquad \forall t < -\ln(1-p)$$

Esperanza y varianza.

$$E[X] = \frac{1-p}{p}, \qquad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Propiedades. Cumple la propiedad de la falta de memoria:

$$P[X \geqslant h + k \mid X \geqslant h] = P[X \geqslant k] \qquad \forall h, k \in \mathcal{X}$$

1.6. Binomial Negativa

Si X modela el número de fracasos antes de llegar al $r-$ésimo éxito (con $r \in \mathbb{N}$) en varias repeticiones de un experimento de Bernoulli de probabilidad de éxito $p \in]0,1[$.

$$X \rightsquigarrow BN(r,p), \qquad r \in \mathbb{N}, \quad p \in]0,1[$$

Notemos que $BN(1,p) \equiv G(p)$.

Espacio muestral. $\mathcal{X} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Función masa de probabilidad.

$$P[X = x] = \binom{x+r-1}{x}(1-p)^x p^r$$

Función generatriz de momentos.

$$M_X(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^r \qquad \forall t < -\ln(1-p)$$

Esperanza y varianza.

$$E[X] = \frac{r(1-p)}{p}, \qquad Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

1.7. Hipergeométrica

Si X modela el número de individuos de una especie de $N_1 \in \mathbb{N}$ ejemplares en una población de tamaño $N \in \mathbb{N}$ al tomar una muestra de $n \in \mathbb{N}$ individuos.

$$X \rightsquigarrow H(N, N_1, n), \qquad n, N, N_1 \in \mathbb{N}, \quad N_1, n \leqslant N$$

Espacio muestral. $\mathcal{X} = [\text{máx}\{0, n-(N-N_1)\}, \text{mín}\{n, N_1\}]$.

Función masa de probabilidad.

$$P[X = x] = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Esperanza y varianza.

$$E[X] = n\frac{N_1}{N}, \qquad Var(X) = \frac{n(N-n)N_1(N-N_1)}{N^2(N-1)}$$

1.8. Poisson

Si X modela el número de ocurrencias de un determinado suceso durante un periodo de tiempo fijo en una región fija del espacio con una media de $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ocurrencias.

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Espacio muestral. $\mathcal{X} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Función masa de probabilidad.

$$P[X = x] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

Función generatriz de momentos.

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Esperanza y varianza.

$$E[X] = \lambda = Var(X)$$

Sus valores se encuetran tabulados para distintos valores de λ.

2. Distribuciones continuas

2.1. Uniforme continua

$$X \rightsquigarrow U(a, b), \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$$

Espacio muestral. $\mathcal{X} = [a, b]$

Función masa de probabilidad.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}$$

Función de distribución.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Función generatriz de momentos.

$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{(b-a)t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^*$$

Esperanza.

$$E[X] = \frac{b+a}{2}$$

2.2. Normal

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \qquad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$$

Espacio muestral. $\mathcal{X} = \mathbb{R}$.

Función masa de probabilidad.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Función generatriz de momentos.

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Esperanza y varianza.

$$E[X] = \mu, \qquad Var(X) = \sigma^2$$

Propiedades.

- **Tipificación.** Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

- **Simétrica.** Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces:

$$P[X \leqslant \mu - x] = P[X \geqslant \mu + x] \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces:

$$\mu = E[X] = Me[X] = Mo[X]$$

3. Aproximaciones

3.1. De Hipergeométrica a Binomial

Sea $X \rightsquigarrow H(N, N_1, n)$, si N es más grande que N_1, si tomamos $p = \frac{N_1}{N}$, tenemos que X puede aproximarse por una distribución binomial $B(n, p)$.

3.2. De Binomial a Poisson

Sea $X \rightsquigarrow B(n, p)$, si n es muy grande y p es aproximadamente 0, si tomamos $\lambda = np$, tenemos que X puede aproximarse por $\mathcal{P}(\lambda)$.

3.3. De Binomial a Normal

Sea $X \rightsquigarrow B(n,p)$, para n grande y p lejos de 0 o 1, tenemos que X puede aproximarse por una distribución normal $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

3.4. De Poisson a Normal

Sea $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, para λ grande, tenemos que X puede aproximarse por una distribución normal $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.

3.5. Corrección por continuidad

Debemos tener cuidado al aproximar variables discretas por continuas:

- Para aproximar $P[X = x_i]$ en una variable discreta, lo aproximaremos por:

  $$P[x_i - 0{,}5 \leqslant X \leqslant x_i + 0{,}5]$$

  en la normal.

- Para aproximar $P[X \leqslant x_i]$, lo aproximaremos por $P[X \leqslant x_i + 0{,}5]$.

- Para aproximar $P[X \geqslant x_i]$, lo aproximaremos por $P[X \geqslant x_i - 0{,}5]$.